8 класс

1. На рисунке 1 изображено числовое колесо. В кружочки поставьте первые девять нечётных простых чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, расположенных по диаметру, была простым числом.

а) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 5?

б) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 3?

2. Даны действительные числа a, b, c, причём $a > b > c$. Верно ли, что

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b\,?$$

3. За круглым столом сидят 100 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько лжецов сидит за столом?

4. *а*) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить 36 целых чисел так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 36 чисел — положительной?

б) Можно ли в таблице размером 5×5 расставить 25 целых чисел так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел — положительной?

5. В треугольнике ABC углы A и B равны $30°$ и $45°$ соответственно. На биссектрисе угла A вне треугольника ABC отметили точку M такую, что $\angle MBC = 90°$. Найдите угол MCB.

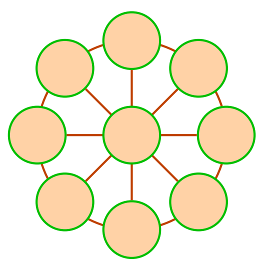

Рис. 1

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. При каком наибольшем натуральном n число $n^3 + 2024$ делится на $n + 1$?

2. Известно, что числа a, b, c отрицательные и $a < b < c$. Расставьте числа $x = (a+b)(b+c)$, $y = (b + c)(c + a)$, $z = (c + a)(a + b)$ в порядке возрастания. Укажите все возможные случаи.

3. Коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ удовлетворяют условию: $p_1p_2 > 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из уравнений имеет два различных действительных корня.

4. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 9 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 меньше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

2. Даны различные действительные числа a и b. Верно ли, что хотя бы одно из уравнений $(x+a)(x+b)=x-a$, $(x-a)(x-b)=x+b$ имеет решение?

3. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 11 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

5. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что

$$\frac{1}{2+ab}+\frac{1}{2+bc}+\frac{1}{2+ca} \geqslant 1.$$

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

11 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

2. При каком наибольшем натуральном n число $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 100$ делится на $n + 1$?

3. В некотором государстве было решено построить 30 новых городов на 20 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

4. Докажите, что если $(a + c)(a + b + c) < 0$, то

$$(b - c)^2 > 4a(a + b + c).$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AB, угол A равен $60°$. Окружность ω касается гипотенузы AB в точке O и проходит через точку C. Описанная окружность треугольника ABC и катет BC пересекают окружность ω соответственно в точках M и N, отличных от C. Найдите угол между прямыми MN и AB.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

8 класс

1. На рисунке 1 изображено числовое колесо. В кружочки поставьте первые девять нечётных простых чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, расположенных по диаметру, была простым числом.

а) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 5?

б) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 3?

Ответ: *а*) *может*; *б*) *не может.*

Решение. *а*) На рисунке 2 изображено числовое колесо, у которого в центре стоит цифра 5, при этом сумма любых трёх чисел, расположенных по диаметру, — простое число.

б) Поставим в центр колеса цифру 3, и рассмотрим остатки от деления на 3 остальных восьми нечётных простых чисел 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Это числа 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2. Среди этих остатков только три равны 1, поэтому на концах одного из четырёх диаметров придётся поставить число с остатком 2. Но тогда соответствующая сумма первоначальных чисел на этом диаметре будет делиться на 3, то есть не будет простым числом.

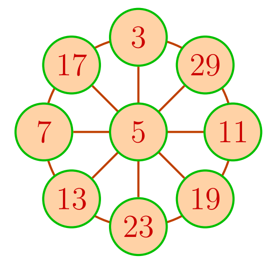

Рис. 2

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное решение пункта *а*) — 3 балла. В пункте *б*) рассмотрены остатки от деления на 3 исходных простых чисел — 3 балла. Полное решение пункта *б*) — 4 балла.

2. Даны действительные числа a, b, c, причём $a > b > c$. Верно ли, что

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b\,?$$

Ответ: *верно.*

Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть и преобразуем полученное выражение:

$$a^2b + b^2c + c^2a - b^2a - a^2c - c^2b = ab(a-b) - c(a^2-b^2) + c^2(a-b) =$$
$$= (a-b)(ab - ac - bc + c^2).$$

В результате пришли к неравенству $(a-b)(b-c)(a-c) > 0$, которое верно, так как выражение в каждой из скобок положительно.

Критерии. Указан только ответ — 0 баллов. Попытка доказательства на конкретных наборах чисел a, b, c — 0 баллов. Получено разложение на два множителя — 2 балла, на три множителя — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. За круглым столом сидят 100 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько лжецов сидит за столом?

Ответ: 100 *лжецов.*

Решение. Допустим, первый человек — рыцарь. Тогда один из его соседей (назовём его вторым) — тоже рыцарь. Тогда с другой стороны от него сидит лжец. Из его ответа следует, что четвертый — рыцарь. Аналогично устанавливаем, что пятый — рыцарь, шестой — лжец, седьмой и восьмой — рыцари, девятый — лжец, и так далее, 99-й — лжец и 100-й рыцарь. Но тогда оба соседи первого — рыцари, как и он. Противоречие. Значит, рыцарей за столом нет.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что если есть рыцарь, то *все* сидящие за столом должны разбиваться на «тройки» вида `РРЛ` — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. *а*) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить 36 целых чисел так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 36 чисел — положительной?

б) Можно ли в таблице размером 5×5 расставить 25 целых чисел так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел — положительной?

Ответ: *а*) *нельзя; б*) *можно.*

Решение. *а*) Квадратная таблица размером 6×6 легко разбивается на 9 квадратов размером 2×2. По условию сумма чисел в каждом квадрате 2×2 отрицательная, поэтому сумма чисел в 9 таких квадратах, равная сумме всех 36 чисел, тоже будет отрицательной.

б) Приведём пример нужной расстановки чисел в таблице размером 5×5 (рис. 3), который можно получить так. Сначала вписываем отрицательные числа в пять клеток — центральную и в четыре, имеющие с ней общую вершину, а неотрицательные — в остальные 20 клеток.

0	0	1	0	0
3	−4	2	−4	3
0	0	0	0	0
3	−4	2	−4	3
0	0	1	0	0

Рис. 3

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное решение пункта *а*) — 3 балла; пункта *б*) — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC углы A и B равны $30°$ и $45°$ соответственно. На биссектрисе угла A вне треугольника ABC отметили точку M такую, что $\angle MBC = 90°$. Найдите угол MCB.

Ответ: $\angle MCB = 45°$.

Решение. (Рис. 4) Отметим на луче AC точку D, симметричную точке B относительно прямой AM. Обозначим через O точку пересечения перпендикуляра BD с биссектрисой AM. В треугольнике BMD высота MO является также медианой, поэтому треугольник BMD — равнобедренный, $MB = MD$.

Угол MLB равен сумме углов LAB и LBA — как внешний угол треугольника ALB, поэтому $\angle MLB = \frac{1}{2} \cdot 30° + 45° = 60°$. Значит, в прямоугольном треугольнике MBL угол BML равен $30°$. Тогда $\angle BMD = 2 \cdot \angle BML = 60°$. Следовательно, треугольник BMD — равносторонний, $BD = MB = MD$. По условию $\angle MBC = 90°$, и значит, $\angle DBC = 90° - 60° = 30°$.

Внешний угол BCD треугольника ABC равен сумме углов A и B, то есть равен $75°$. Отсюда в треугольнике BCD находим $\angle CDB = 180° - 75° - 30° = 75° = \angle BCD$, поэтому треугольник BCD — равнобедренный, $BC = BD$. Поскольку $BD = BM$, прямоугольный треугольник MBC — равнобедренный, и значит, $\angle MCB = 45°$.

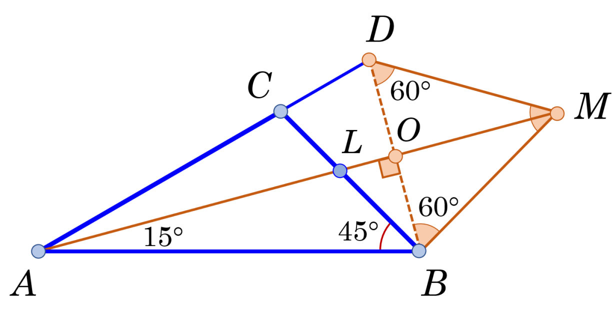

Рис. 4

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что треугольник MBD равнобедренный — 2 балла. Доказано, что треугольника MBD равносторонний — ещё 2 балла. Доказано, что треугольник BCD равнобедренный — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

9 класс

1. При каком наибольшем натуральном n число $n^3 + 2024$ делится на $n + 1$?

Ответ: 2022.

Решение. Заметим, что n^3+1 делится на $n+1$, так как $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$. Отсюда следует, что выражение $n^3 + 2024 = (n^3 + 1) + 2023$ делится на $n + 1$ тогда и только тогда, когда 2023 кратно $n + 1$. Значит, наибольшее натуральное значение n равно 2022.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что число $n = 2022$ удовлетворяет условию, но не обосновано, что бо́льших значений n нет — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Известно, что числа a, b, c отрицательные и $a < b < c$. Расставьте числа $x = (a+b)(b+c)$, $y = (b + c)(c + a)$, $z = (c + a)(a + b)$ в порядке возрастания. Укажите все возможные случаи.

Ответ: $y < x < z$.

Решение. По условию $a < b < c < 0$, и значит,

$$x - y = (b + c)(a + b - c - a) = b^2 - c^2 > 0,$$
$$z - x = (a + b)(c + a - b - c) = a^2 - b^2 > 0,$$

поэтому $y < x < z$.

Критерии. Только ответ или ответ «с объяснением» в виде числовых примеров — 0 баллов. Верно получено только одно из неравенств — 2 балла. Арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения, — снять 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. Коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ удовлетворяют условию: $p_1p_2 > 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из уравнений имеет два различных действительных корня.

Решение. Предположим, что оба уравнения имеют *не более одного* действительного корня, и значит, дискриминанты квадратных трёхчленов неположительные, то есть $p_1^2 \leqslant 4q_1$ и $p_2^2 \leqslant 4q_2$. Тогда их сумма также неположительная: $p_1^2 + p_2^2 \leqslant 4(q_1 + q_2)$. По условию задачи правая часть этого неравенства меньше $2p_1p_2$, поэтому $p_1^2 + p_2^2 < 2p_1p_2$, то есть $(p_1 - p_2)^2 < 0$, противоречие. Значит, исходное предположение неверно, и хотя бы одно из уравнений имеет два различных действительных корня.

Критерии. Утверждение проверено для частных примеров – 0 баллов. Доказано более слабое утверждение – дискриминант одного из уравнений неотрицательный, снимается 2 балла.

4. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 9 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

Ответ: 124 *парома.*

Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_9$ — количество городов на каждом острове. Предположим, что существуют числа i и j такие, что $x_i \geqslant x_j > 1$, и рассмотрим произвольный город A на j-м острове. Число паромных сообщений из города A равно $20 - x_j$. Попробуем «перенести» город A на более заселённый i-й остров. Тогда на i-м острове будет x_i+1 городов и из города A будет выходить $20-(x_i+1)$ паромов, причём никакие другие паромные сообщения этот перенос не затронет. Но

$$20 - (x_i + 1) < 20 - x_j \quad\iff\quad x_j < x_i + 1.$$

Другими словами, при переносе города на более заселённый остров *число паромных сообщений уменьшается.* Значит, наименьшее количество паромов получится, когда на одном острове будет 12 городов, а на каждом из остальных 8 островов — по одному городу. В этом случае число паромных сообщений будет равно

$$12 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 124.$$

Критерии. Правильно указана конструкция примера, но неправильно подсчитано число паромов — 2 балла. Пример с правильным подсчётом числа паромов — 3 балла. Доказано, что число паромных сообщений уменьшается при переносе города на более заселённый остров — ещё 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

Ответ: $AE : AF = 1 : 1$.

Решение. (Рис. 5.) Рассмотрим равнобедренные треугольники O_1AN и O_2AM. Их углы при вершине A равны как вертикальные. Отсюда легко следует равенство всех остальных углов этих треугольников, в частности, равны углы при центрах O_1 и O_2. Так как угол MEA — внешний для треугольника EAN, то

$$\angle MEA = \angle EAN + \angle ENA.$$

Угол EAN измеряется половиной дуги NE, а угол ENA — половиной дуги EA, поэтому угол MEA равен половине центрального угла при вершине O_1. Угол MFA измеряется половиной дуги AM, и значит, равен половине центрального угла при вершине O_2. Следовательно, $\angle MEA = \angle MFA$, то есть треугольник AEF — равнобедренный, и значит, $AE = AF$.

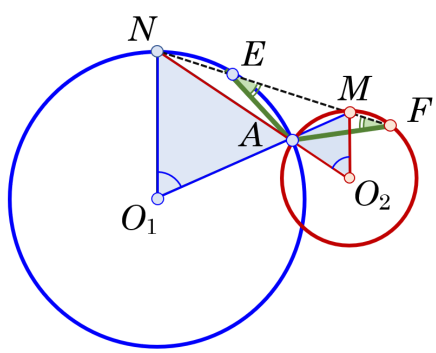

Рис. 5

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что угол MEA равен равен половине центрального угла с вершиной O_1 — 3 балла. Доказано, что угол MFA равен половине центрального угла с вершиной O_2 — 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

10 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 меньше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

Ответ: 1010*,* 1011*,* 1012*,* 1013*.*

Решение. Заметим, что если в обеих группах есть по чётному числу, то оба произведения чётны, их разность чётна и не может равняться 2023. Поэтому в одной группе чётные, в другой – нечётные числа. Пусть эти числа $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Произведение в одной группе равно $(n-1)(n+1) = n^2-1$, в другой – $n(n+2) = n^2+2n$. Из условия следует, что

$$2023 = (n^2+2n) - (n^2-1) = 2n+1,$$

отсюда $n = 1011$. Поэтому искомые числа – 1010, 1011, 1012, 1013.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 1 балл. Рассмотрен только один (из трёх) способов разбиения на две группы — снимается 2 балла. Доказано, что числа можно разбить только на группы $n-1$, $n+1$ и n, $n+2$ — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Даны различные действительные числа a и b. Верно ли, что хотя бы одно из уравнений $(x+a)(x+b) = x-a$, $(x-a)(x-b) = x+b$ имеет решение?

Ответ: *верно.*

Первое решение. Обозначим $f_1(x) = (x+a)(x+b)-(x-a)$ и $f_2(x) = (x-a)(x-b)-(x+b)$. Предположим, утверждение задачи неверно, то есть оба уравнения не имеют корней. Тогда их дискриминанты отрицательны, то есть $(a+b-1)^2 < 4(ab+a)$ и $(a+b+1)^2 < 4(ab-b)$. Эти неравенства можно переписать в виде:

$$(a-b-1)^2 < 4a+4b \quad \text{и} \quad (a-b-1)^2 < -4a-4b.$$

Значит, оба числа в правых частях положительны, чего быть не может, так как их сумма равна нулю. Противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении предположим, что f_1 и f_2 не имеют корней. Поскольку старшие коэффициенты этих квадратных трёхчленов положительны, получаем, что $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$ *при всех* x. Однако $f_1(-b) = a+b$ и $f_2(a) = -(a+b)$, то есть

$$f_1(-b) + f_2(a) = 0,$$

и значит, неверно, что $f_1(-b) > 0$ и $f_2(a) > 0$. Противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Рассмотрена сумма дискриминантов исходных квадратных трёхчленов — 2 балла. Замечено (в предположении от противного), что $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$ *при всех* x — 1 балл. Доказано утверждение для частных случаев ($a > -b$ или аналогичные) — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 11 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

Ответ: 145 *паромов.*

Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_{11}$ — количество городов на каждом острове. Предположим, что существуют числа i и j такие, что $x_i \geqslant x_j > 1$, и рассмотрим произвольный город A на j-м острове. Число паромных сообщений из города A равно $20 - x_j$. Попробуем «перенести» город A на более заселённый i-й остров. Тогда на i-м острове будет $x_i + 1$ городов и из города A будет выходить $20 - (x_i + 1)$ паромов, причём никакие другие паромные сообщения этот перенос не затронет. Но

$$20 - (x_i + 1) < 20 - x_j \quad \iff \quad x_j < x_i + 1.$$

Другими словами, при переносе города на более заселённый остров *число паромных сообщений уменьшается.* Значит, наименьшее количество паромов получится, если на одном острове будет 10 городов, а на каждом из остальных 10 островов — по одному городу. В этом случае число паромных сообщений будет равно

$$10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 145.$$

Критерии. Правильно указана конструкция примера, но неправильно подсчитано число паромов — 2 балла. Пример с правильным подсчётом числа паромов — 3 балла. Доказано, что число паромных сообщений уменьшается при переносе города на более заселённый остров — ещё 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

Ответ: $AE : AF = 1 : 1$.

Решение. (Рис. 6.) Рассмотрим равнобедренные треугольники O_1AN и O_2AM. Их углы при вершине A равны как вертикальные. Отсюда легко следует равенство всех остальных углов этих треугольников, в частности, равны углы при центрах O_1 и O_2. Так как угол MEA — внешний для треугольника EAN, то

$$\angle MEA = \angle EAN + \angle ENA.$$

Угол EAN измеряется половиной дуги NE, а угол ENA — половиной дуги EA, поэтому угол MEA равен половине центрального угла при вершине O_1. Угол MFA измеряется половиной дуги AM, и значит, равен половине центрального угла при вершине O_2. Следовательно, $\angle MEA = \angle MFA$, то есть треугольник AEF — равнобедренный, и значит, $AE = AF$.

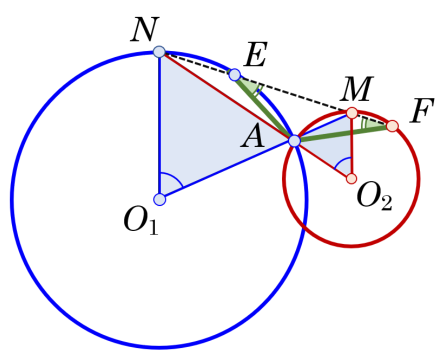

Рис. 6

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что угол MEA равен равен половине центрального угла с вершиной O_1 — 3 балла. Доказано, что угол MFA равен половине центрального угла с вершиной O_2 — 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

5. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca} \geqslant 1.$$

Решение. Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и гармоническом для положительных чисел

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{9}{x+y+z}\,,$$

которое после приведения к общему знаменателю равносильно очевидному

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)^2\geqslant 0.$$

Взяв в качестве x, y и z соответственно величины $2+ab$, $2+bc$ и $2+ca$, получим:

$$\frac{1}{2+ab}+\frac{1}{2+bc}+\frac{1}{2+ca}\geqslant\frac{9}{6+ab+bc+ca}\,.$$

Знаменатель дроби можно увеличить, заменив выражение $ab+bc+ca$ на бо́льшее $a^2+b^2+c^2$, так как $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca \iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$. Поэтому

$$\frac{9}{6+ab+bc+ca}\geqslant\frac{9}{6+a^2+b^2+c^2}\,.$$

Учитывая условие $a^2+b^2+c^2=3$, приходим к требуемому.

Критерии. Применение неравенства о среднем гармоническом (возможно, без доказательства) — 3 балла. Использовано неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

11 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

Ответ: 1010, 1011, 1012, 1013.

Решение. Заметим, что если в обеих группах есть по чётному числу, то оба произведения чётны, их разность чётна и не может равняться 2023. Поэтому в одной группе чётные, в другой – нечётные числа. Пусть эти числа $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Произведение в одной группе равно $(n-1)(n+1) = n^2-1$, в другой – $n(n+2) = n^2+2n$. Из условия следует, что

$$2023 = (n^2+2n) - (n^2-1) = 2n+1,$$

отсюда $n = 1011$. Поэтому искомые числа – 1010, 1011, 1012, 1013.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 1 балл. Рассмотрен только один (из трёх) способов разбиения на две группы — снимается 2 балла. Доказано, что числа можно разбить только на группы $n-1$, $n+1$ и n, $n+2$ — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. При каком наибольшем натуральном n число $n^8+n^6+n^4+n^2+100$ делится на $n+1$?

Ответ: $n = 103$.

Решение. Заметим, что $n^{2k}-1$ делится на n^2-1, так как

$$n^{2k}-1 = (n^2-1)(n^{2k-2}+n^{2k-4}+\ldots+n^2+1).$$

Отсюда следует, что каждое из выражений n^8-1, n^6-1, n^4-1, n^2-1 делится на $n+1$. Таким образом, исходное выражение

$$n^8+n^6+n^4+n^2+100 = (n^8-1)+(n^6-1)+(n^4-1)+(n^2-1)+104$$

делится на $n+1$ тогда и только тогда, когда 104 кратно $n+1$. Значит, наибольшее натуральное значение n равно 103.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Установлено, что каждое из чисел вида n^{2k} при делении на $n+1$ даёт остаток 1 — 2 балла. Доказано, что число $n = 103$ удовлетворяет условию, но не обосновано, что бóльших значений n нет — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. В некотором государстве было решено построить 30 новых городов на 20 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

Ответ: 380 *паромов.*

Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_{20}$ — количество городов на каждом острове. Предположим, что существуют числа i и j такие, что $x_i \geqslant x_j > 1$, и рассмотрим произвольный город A на j-м острове. Число паромных сообщений из города A равно $30-x_j$. Попробуем «перенести» город A на более заселённый i-й остров. Тогда на i-м острове будет x_i+1 городов и из города A будет выходить $30-(x_i+1)$ паромов, причём никакие другие паромные сообщения этот перенос не затронет. Но

$$30-(x_i+1) < 30-x_j \iff x_j < x_i+1.$$

Другими словами, при переносе города на более заселённый остров *число паромных сообщений уменьшается.* Значит, наименьшее количество паромов получится, если на одном острове будет 11 городов, а на каждом из остальных 19 островов — по одному городу. В этом случае число паромных сообщений будет равно

$$11 \cdot 19 + \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 18 = 380.$$

Критерии. Правильно указана конструкция примера, но неправильно подсчитано число паромов — 2 балла. Пример с правильным подсчётом числа паромов — 3 балла. Доказано, что число паромных сообщений уменьшается при переносе города на более заселённый остров — ещё 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. Докажите, что если $(a+c)(a+b+c) < 0$, то

$$(b-c)^2 > 4a(a+b+c).$$

Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2+(b-c)x+(a+b+c)$. Требуемое неравенство означает, что дискриминант $f(x)$ положителен, то есть трёхчлен $f(x)$ имеет различные корни.

Из условия задачи имеем

$$f(0) \cdot f(-1) = 2(a+b+c)(a+c) < 0,$$

то есть трёхчлен принимает значения разных знаков, и значит, $f(x)$ действительно имеет различные корни. (В случае совпадающих корней квадратный трёхчлен имеет вид $f(x) = a(x-x_0)^2$, то есть принимает значения или только неотрицательные, или только неположительные, что противоречит доказанному.)

Критерии. Использована идея вспомогательного трёхчлена $f(x)$ — 2 балла. Отмечено, что $f(0) = a+b+c$ или $f(-1) = 2(a+c)$ — ещё 1 балл. Доказано, что функция $f(x)$ принимает значения разных знаков — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AB, угол A равен $60°$. Окружность ω касается гипотенузы AB в точке O и проходит через точку C. Описанная окружность треугольника ABC и катет BC пересекают окружность ω соответственно в точках M и N, отличных от C. Найдите угол между прямыми MN и AB.

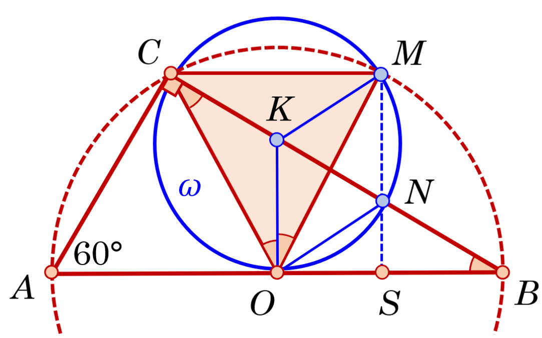

Рис. 7

Ответ: $90°$.

Решение. (Рис. 7.) Проведём перпендикуляр в точке O к гипотенузе AB до пересечения с катетом BC в точке K. Треугольники COM и COB — равнобедренные, так как $OC = OM = OB$ как радиусы описанной окружности треугольника ABC, поэтому $\angle OBC = \angle OCB = 30°$. Треугольник OAC — равносторонний, так как $OA = OC$ и $\angle OAC = \angle OCA = 90° - \angle OCB = 60°$.

Поэтому $\angle COK = 90° - 60° = 30° = \angle OCK$, и значит, $KC = KO$. Поскольку окружность ω касается сторон AB и AC, точка K — центр этой окружности, и поэтому $KM = KO = KC$. Это означает, что точка K — центр описанной окружности равнобедренного треугольника COM и лежит на биссектрисе (медиане и высоте) угла COM. Отсюда следует равенство треугольников COK

и KOM по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle KOM = \angle KMO = \angle KOC = 30^\circ$ и $\angle COM = \angle COK + \angle KOM = 60^\circ$. Значит, треугольник COM — равносторонний, $\angle OKN = \angle KOC + \angle KCO = 60^\circ$. Аналогично, $\angle MKN = 60^\circ$, поэтому треугольники OKN и MKN — равносторонние, $\angle OMN = 60^\circ - \angle KMO = 30^\circ$, $\angle MOS = 90^\circ - \angle KOM = 60^\circ$.

В треугольнике OSM находим $\angle OSM = 180^\circ - \angle OMS - \angle MOS = 90^\circ$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что центр окружности ω совпадает с точкой K пересечения стороны BC и перпендикуляра к гипотенузе в точке O — 2 балла. Доказано, что треугольник COM равносторонний — ещё 2 балла. Доказано, что треугольники OKN и MKN равносторонние — ещё 2 балла. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.